Computación 2013-1
Tarea 6: Maxima

Entrega: Domingo 2 de diciembre de 2012, por correo electrónico a Iker. Enviar un archivo `nombre-apellido-N.wxm` por cada pregunta

Nota: Todas las gráficas deben indicar claramente qué representa cada eje incluyendo unidades.

1. **Periodo de un péndulo simple.** El periodo de oscilación de un péndulo simple de longitud L para cualquier ángulo α respecto a la vertical, está dado por

$$\tau = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}(1-\epsilon^2\sin^2\phi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\phi$$

con $\epsilon = \sin(\alpha/2)$. La integral no se puede calcular analíticamente y por ello debemos utilizar el Teorema de Taylor para obtener un valor aproximado (tan aproximado como se quiera).

Desarrolla el integrando en serie de Taylor para la variable ϵ alrededor de $\epsilon = 0$ hasta cuarto orden y después calcula la integral.

Sustituye ϵ en términos de α y desarrolla en serie de Taylor para la variable α alrededor de $\alpha = 0$ hasta cuarto orden.

El primer término de esta expresión es el periodo del péndulo simple para ángulos "pequeños". Determina gráficamente qué significa "pequeño", si se quiere que el error en la aproximación del periodo sea menor que 1 %.

Ayuda tener el eje X en múltiplos racionales de π. Agrega este argumento como el último para el comando `wxplot2d`

`[gnuplot_preamble,"set xtics pi/16; set format x '%.3P pi'"]`

2. **Oscilaciones armónicas.** La forma más general de una oscilación armónica está dada por

$$u(t) = A\cos(\omega t - \delta) + K$$

Grafica $u(t)$ vs. t en el intervalo de tiempo $[0, 2\pi]$

1. Eligiendo un valor para cada parámetro
2. Con distintos valores de A, los demás parámetros fijos
3. Con distintos valores de ω, los demás parámetros fijos
4. Con distintos valores de δ, los demás parámetros fijos
5. Con distintos valores de K, los demás parámetros fijos

A partir de lo obtenido, explica el significado de cada parámetro. Podría ayudar dibujar algunas oscilaciones en la misma gráfica.

3. **Modos normales.** Considera dos osciladores armónicos idénticos, de masa m y constante k, acoplados mediante un resorte también con constante k. El movimiento de los carritos alrededor de su punto de equilibrio está dado por

$$
\begin{aligned}
x_1(t) - \bar{x}_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \qquad (1) \\
x_2(t) - \bar{x}_2 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Las frecuencias, ω_1 y ω_2 se calculan a partir de la ecuación

$$
\det(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) = 0, \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}
$$

- Encuentra ω_1 y ω_2 (las raíces positivas de la ecuación). ¿Cómo se relacionan?
- Si un carrito oscila alrededor de $\bar{x}_1 = 2$ y el otro oscila alrededor de $\bar{x}_2 = -2$, grafica la posición de cada uno en el intervalo de tiempo $[0, 88]$. Usa las constantes $A_1 = 1$, $A_2 = 0.7$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \pi/2$, $\omega_1 = \pi/11$.
- Cuando $A_1 = 0$, los carritos se mueven en su primer modo normal. Cuando $A_2 = 0$, los carritos se mueven en su segundo modo normal. En cada modo, dibuja el movimiento de los carritos. ¿Qué observas? Caracteriza su movimiento en términos de las respuestas al ejercicio 2.

Para crear una animación del movimiento de los carritos es importante recordar que $\cos(0) = \cos(\omega T) = 1$ cuando $\omega T = 2\pi$. Es decir, cuando transcurre un tiempo T el carrito completa una oscilación. Cuando $t = NT$, el carrito habrá completado N oscilaciones. Si fijamos el tiempo total de la animación τ, para que el movimiento sea continuo es necesario que $\tau = NT$.

Otro aspecto importante es el nombre de cada imagen que vas a guardar con la posición de los carritos. Si en cada instante de tiempo t tomas una fotografía de los carritos y la guardas como `carritos_t.png`, la animación no va a resultar bien porque las computadoras ordenan los archivos en orden alfabético y no en orden numérico. Entonces, después del 1 va el 10, porque son "palabras" que empiezan con 1. Una solución es nombrar las imágenes como `carrito_0t.png`, si tienes menos de 100 imágenes.

- Utiliza las instrucciones de la *Guía rápida de Maxima* para obtener una animación de cada modo normal y del movimiento de los dos carritos acoplados. Elige adecuadamente el rango en el eje X y las coordenadas y de los carritos.

Este modelo es muy útil en la física y la ingeniería. Por ejemplo, los carritos podrían ser partes de un edificio, que se mueve en un temblor. Conocer los modos normales de las ondas sísmicas, permite saber de qué altura NO se deben construir edificios, ya que si los modos normales de éstos coinciden con los del movimiento telúrico, se produce resonancia y esto resulta en destrucción.