Computación 2013-1
Tarea 5

Entrega: Miércoles 14 de noviembre de 2012, por correo electrónico a Iker

Nota: Todas las gráficas deben indicar claramente qué representa cada eje y qué unidades tiene.

1. **El gato y el ratón.** Un gato, cuya posición es $\mathbf{r}_G$ y su velocidad es $\mathbf{v}_G$, persigue a un ratón, cuya posición es $\mathbf{r}_R$ y su velocidad es $\mathbf{v}_R$. El gato corre directamente hacia el ratón y por tanto su velocidad está dada por

$$\frac{\mathbf{v}_G}{v_G} = \frac{\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_G}{|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_G|}$$

Si denotamos la posición del gato relativa al ratón por $\mathbf{R} = \mathbf{r}_G - \mathbf{r}_R$, esta ecuación se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{R}} = -\frac{\mathbf{R}}{R} v_G - \mathbf{v}_R$$

Si conocemos la velocidad $\mathbf{v}_R$ del ratón y la rapidez v_G del gato como funciones del tiempo, esta ecuación diferencial determina la trayectoria del gato relativa al ratón; la captura del ratón ocurre cuando $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. La trayectoria del gato relativa al origen de un sistema de coordenadas es $\mathbf{r}_G = \mathbf{R} + \mathbf{r}_R$.

Si la persecución ocurre sobre un plano, escribimos $\mathbf{R} = X\hat{\mathbf{x}} + Y\hat{\mathbf{y}}$ y X e Y satisfacen las ecuaciones diferenciales acopladas

$$\dot{X} = -\frac{v_G X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - v_{x,R}, \quad \dot{Y} = -\frac{v_G Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - v_{y,R}$$

junto con las condiciones iniciales $X(0) = x_0$ y $Y(0) = y_0$. Dada la trayectoria del ratón y la rapidez del gato, ¿qué camino sigue este último? Consideraremos dos casos, en los cuales la rapidez de ambos es constante.

1. Inicialmente el ratón está en el origen del sistema de coordenadas y el gato está en un punto (x_0, y_0). El ratón corre a lo largo del eje x y el gato lo persigue. Muestra que el gato atrapa al ratón si $v_G > v_R$, mientras que si corren con la misma rapidez nunca lo atrapa.
2. Inicialmente el ratón está en el perímetro de un círculo, en cuyo centro está el gato. El ratón corre sobre el perímetro del círculo con rapidez v_R y el gato lo persigue. Muestra que si $v_G \geq v_R$, el gato atrapará al ratón.

Recuerda que un círculo de radio R se puede dibujar con las ecuaciones $x(t) = R\cos\omega t, \quad y(t) = R\sin\omega t$ en un tiempo $2\pi/\omega$. La velocidad con la que se dibuja está dada por la derivada de estas ecuaciones.

En cada caso dibuja en una sola gráfica la trayectoria que sigue el gato relativa al ratón, para distintos valores de su rapidez en comparación con la del ratón.

2. **Oscilador armónico amortiguado** Experimenta con una simulación numérica de un oscilador armónico amortiguado. Para ello resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + x = 0$$

El factor Q está relacionado con la pérdida de energía del oscilador debido al amortiguamiento. Explica qué notas cuando $Q < \frac{1}{2}$, $Q > \frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{2}$. Compara los distintos casos en la misma gráfica. Además, muestra todas las gráficas que consideres interesantes para el análisis.

3. **Lanzamiento de proyectiles.** Un proyectil de masa m lanzado desde el origen con velocidad inicial $\mathbf{u}$ en presencia de un campo gravitacional uniforme $\mathbf{g}$ experimenta una fuerza de arrastre cuadrática. Suponiendo que el movimiento ocurre en el plano XY, las ecuaciones diferenciales para obtener la trayectoria del proyectil son:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{\lambda}|\mathbf{v}|v_x \quad \ddot{y} = -g - \frac{1}{\lambda}|\mathbf{v}|v_y, \quad v_x = |\mathbf{u}|\cos\theta \quad v_y = |\mathbf{u}|\sin\theta$$

Resuelve estas ecuaciones con $|\mathbf{u}| = 100$ ms^{-1}, $\theta = \pi/6$, $g = 9.8$ ms^{-2} y los siguientes valores de λ: 100 m, 250 m, 500 m, 900 m, 1500 m, 4500 m e "infinito" (sin resistencia). En la misma gráfica muestra las trayectorias correspondientes a cada uno de estos casos. ¿Qué observas?

Ahora consideramos el caso en que el proyectil se mueve en una atmósfera cuya densidad disminuye con la altura. Entonces, reemplazamos λ por $\lambda\,\mathrm{e}^{y/Y}$, es decir, la densidad del aire decrece exponencialmente.

Resuelve las ecuaciones diferenciales de arriba para este caso, con $|\mathbf{u}| = 1000$ ms^{-1}, $\lambda = 30,000$ m y $Y = 7460$ m. Varía el ángulo del lanzamiento y determina con cuál se obtiene el mayor alcance. Muéstralo en una gráfica.

4. Prepara un documento con LaTeX en el que incluyas las gráficas que obtuviste en cada ejercicio y expliques lo que se te pide.

Apéndice

Recuerda que una ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$ se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x} && (1) \\ \dot{y}_2 &= F(t, x, \dot{x}) && (2) \end{aligned}$$

En forma vectorial

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ F(t, x, \dot{x}) \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones en *Octave*, necesitas una función anónima que tome un vector renglón con el intervalo de tiempo en el que quieres resolver la ecuación, `t=[tmin,tmax]`, y un vector columna `y=[x_0;v_0]` con entradas `y(1)` la posición inicial y `y(2)` la correspondiente componente de la velocidad inicial, y regrese un vector columna correspondiente con el sistema de ecuaciones de arriba `[v_0;F(t,x_0,v_0)]`.